融合問題

例題 1　図形量の最大・最小／相加・相乗平均

内積と微分（数学Ⅲ）を用いて解いた場合の略解

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\begin{pmatrix}-x\\1-x\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\begin{pmatrix}-x\\2-x\end{pmatrix},\ \angle\mathrm{APB}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|}$ より，

$$\cos\angle\mathrm{APB}=\frac{2x^2-3x+2}{\sqrt{2x^2-2x+1}\sqrt{2x^2-4x+4}}$$

ここで， $2x^2-3x+2=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{8}{7}>0$ より， $\cos\angle\mathrm{APB}>0$

これと $\angle\mathrm{APB}$ は $\Delta\mathrm{APB}$ の内角であることから， $0<\angle\mathrm{APB}<\dfrac{\pi}{2}$ ・・・①

したがって， $\angle\mathrm{APB}$ が最大となるのは $\cos^2\angle\mathrm{APB}$ が最小となるときである。

$\cos^2\angle\mathrm{APB}=f(x)=\left(\dfrac{2x^2-3x+2}{\sqrt{2x^2-2x+1}\sqrt{2x^2-4x+4}}\right)^2$ とおくと，

$$f(x)=\frac{4x^4-12x^3+17x^2-12x+4}{4x^4-12x^3+18x^2-12x+4}=1-\frac{x^2}{4x^4-12x^3+18x^2-12x+4}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{4x(x+1)(x-1)(2x^2-3x+2)}{(4x^4-12x^3+18x^2-12x+4)^2}$$

これと $2x^2-3x+2=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{8}{7}>0$ および $x>0$ より， $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$	/
$f(x)$	/	$\downarrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\uparrow$	1

よって， $f(x)$ すなわち $\cos^2\angle\mathrm{APB}$ の最小値は $\dfrac{1}{2}$

これと①より $\cos\angle\mathrm{APB}$ の最小値は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

ゆえに， $\angle\mathrm{APB}$ の最大値は $\dfrac{\pi}{4}$ である。

例題 5　ベクトルの活用／90° 回転

補足：R の候補を求めてから接線 l の上側の領域にあるものを選んでもよい。

接線 l の方程式は $y = 2px - p^2$

90° 回転したベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{QR'}}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{QR'}} = \pm\begin{pmatrix} -2p \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR'}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QR'}} = \begin{pmatrix} p+1 \\ p^2+2p \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} -2p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p+1 \\ p^2+2p+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3p+1 \\ p^2+2p-1 \end{pmatrix}$

よって，$\mathrm{R'}$ の座標は $(-p+1,\ p^2+2p+1), (3p+1,\ p^2+2p-1)$

これらのうち点 R は接線 l の上側の領域の点であり，

これを満たすのは $(-p+1,\ p^2+2p+1)$ である。

ゆえに，$\mathrm{R}(-p+1,\ p^2+2p+1)$

14 演習題

a_n を 2 で割った余りを p_n とすると，

$a_{n+2} = 2(a_{n+1} - 4a_n) + a_{n+1} + a_n$ より，$p_{n+2} = p_{n+1} + p_n$

a_n を 5 で割った余りを q_n とすると，

$a_{n+2} = 5 \cdot (-2a_n) + 3a_{n+1} + 3a_n$ より，$q_{n+2} = 3(q_{n+1} + q_n)$

例題 16　方程式の有理数解

有理数解 $\dfrac{q}{p}$（p は自然数，q は整数で p と q は互いに素）が存在すると仮定すると，

$\dfrac{q^3}{p^3} - \dfrac{q^2}{p^2} + 2\cdot\dfrac{q}{p} - 1 = 0$ より，$\dfrac{q^3}{p^3} = \dfrac{q^2}{p^2} - 2\cdot\dfrac{q}{p} + 1$

両辺を p^2 倍すると，$\dfrac{q^3}{p} = q^2 - 2pq + p^2$

右辺は整数だから，$p = 1$

よって，有理数解 $\dfrac{q}{p}$ は整数である。

つぎに，$x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ の解の存在範囲について調べる。

$f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ とおくと，

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2 = 3\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{5}{3} > 0$ より $f(x)$ は単調増加関数である。

したがって，$f(x) = 0$ は 1 つの実数解をもつ。

ところが，$f(0) = -1,\ f(1) = 1$ より，その解は整数解ではない。

よって，有理数解をもつと仮定すると矛盾が生じる。

ゆえに，実数解は無理数である。